数理逻辑-(4)归结法原理

马 帅
计算机学院
mashuai@buaa.edu.cn

提纲

- 4.1机械证明简介
- 4.2命题逻辑归结法
- 4.3前束范式与斯科伦范式
- 4.4谓词逻辑归结法
- 4.5谓词逻辑归结法的完备性

简介

- 自动推理早期的工作主要集中在机器定理证明。
- 机械定理证明的中心问题是寻找判定公式是否是有效的通用程序。
- 对命题逻辑公式，由于解释的个数是有限的，总可以建立一个通用判定程序，使得在有限时间内判定出一个公式是有效的或是无效的。
- 对一阶逻辑公式，其解释的个数通常是任意多个，丘奇（A.Church）和图灵（A.M.Turing）在1936年证明了不存在判定公式是否有效的通用程序。
  - 如果一阶逻辑公式是有效的，则存在通用程序可以验证它是有效的
  - 对于无效的公式这种通用程序一般不能终止。

简介(续)

- 1930年希尔伯特（Herbrand）为定理证明建立了一种重要方法，他的方法奠定了机械定理证明的基础。
- 开创性的工作是赫伯特·西蒙（Herbert A. Simon）和艾伦·纽威尔（Allen Newell）的Logic Theorist。
- 机械定理证明的主要突破是1965年由鲁宾逊（John Alan Robinson）做出的，他建立了所谓归结原理，使机械定理证明达到了应用阶段。
- 归结法推理规则简单,而且在逻辑上是完备的，因而成为逻辑式程序设计语言Prolog的计算模型。

提纲

- 4.1机械证明简介
- 4.2命题逻辑归结法
- 4.3前束范式与斯科伦范式
- 4.4谓词逻辑归结法
- 4.5谓词逻辑归结法的完备性

基本原理

- $Q_1,\cdots,Q_n \models R$，当且仅当$Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n \wedge \neg R$不可满足
- 证明$Q_1,\cdots,Q_n \models R$
  - (1) $Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n \wedge \neg R$化为合取范式；
  - (2) 构建**Ω**子句集合，**Ω**为$Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n \wedge \neg R$合取范式的所有简单析取范式组成集合；
  - (3) 若**Ω**不可满足，则$Q_1,\cdots,Q_n \models R$。

机械式证明方法

- 若证明$Q_1,\cdots,Q_n \models R$，只要证明$Q_1\wedge\cdots\wedge Q_n\wedge\neg R$不可满足。
- 机械式证明：
  - 公式$Q_1\wedge\cdots\wedge Q_n\wedge\neg R$的合取范式；
  - 合取范式的所有简单析取范式，即Ω;
  - 证明Ω不可满足
- 则有$Q_1,\cdots,Q_n \models R$。
- 机械式地证明Ω不可满足是关键问题

子句与空子句

- 定义：原子公式及其否定称为文字(literals)；文字的简单析取范式称为子句，不包含文字的子句称为空子句，记为□。
- 例如:
  - p、¬q、¬r和s都是文字
  - p∨¬q∨¬r∨s是简单析取式，因此子句
    - 文字p、¬q、¬r和s
  - p∨¬q∨¬r∧s不是简单析取范式，因此不是子句。

- 定义：设Q是简单析取范式，q是Q的文字，在Q中去掉文字q，记为Q - q。

- 例如：
  - Q是子句$p\vee\neg q\vee\neg r\vee s$，Q - ¬q是子句$p\vee\neg r\vee s$。

归结子句（resolvent）

- 定义：设Q_1,Q_2是子句，q_1和q_2是相反文字，并且在子句Q_1和Q_2中分别出现，称子句$(Q_1 - q_1)\vee(Q_2 - q_2)$为$Q_1$和$Q_2$的归结子句。

- 例如，Q_1是子句$p\vee\neg q\vee\neg r$，Q_2是子句$p\vee q\vee w\vee s$，$\neg q$和q是相反文字，子句$p\vee\neg r\vee w\vee s$是Q_1和Q_2的归结子句。
- 例如，Q_1是子句$\neg q$，Q_2是子句q，$\neg q$和q是相反文字，子句□是Q_1和Q_2的归结子句。
- 例如，Q_1是子句$p\vee\neg q\vee\neg r$，Q_2是子句$p\vee w\vee s$，在子句Q_1和Q_2中没有相反文字出现，子句$Q_1\vee Q_2$，即$p\vee\neg q\vee\neg r\vee w\vee s$不是$Q_1$和$Q_2$的归结子句。

- 定理：如果子句Q是Q_1, Q_2的归结子句，则$Q_1, Q_2 \models Q$
- 证明：
- 设$Q_1=p\vee q_1\vee\cdots\vee q_n$，$Q_2=\neg p\vee r_1\vee\cdots\vee r_m$。
-
- 赋值函数$\sigma(Q_1)=1$，即$\sigma(p\vee q_1\vee\cdots\vee q_n)=1$，$\sigma(p)\vee \sigma(q_1\vee\cdots\vee q_n)=1$.
- 赋值函数$\sigma(Q_2)=1$，即$\sigma(\neg p\vee r_1\vee\cdots\vee r_m)=1$，$\neg\sigma(p)\vee \sigma(r_1\vee\cdots\vee r_m)=1$.
- 有$\sigma(q_1\vee\cdots\vee q_n\vee r_1\vee\cdots\vee r_m)=1$，即$\sigma(Q)=1$。
- 证毕

反驳（Refutation ）

- 定义：设Ω是子句集合，如果子句序列$Q_1, \cdots,$ Q_n满足如下条件，则称子句序列$Q_1,\cdots,Q_n$为子句集合Ω的一个反驳。
- (1) 对于每个$1 \leqslant k < n$，
  - $Q_k \in \Omega$，或者
  - Q_k是Q_i和Q_j的归结子句，$i<k$，$j<k$。
- (2) Q_n是□。

- 例题：$(Q\to R)\to Q \vdash Q$　　　　　皮尔斯律
- 证明：
- 因为$((Q\to R)\to Q)\wedge\neg Q$的合取范式$Q\wedge(\neg R\vee Q)\wedge\neg Q$，所以子句集合$\boldsymbol{\Omega}=\{Q, \neg R\vee Q, \neg Q\}$
- $Q_1= Q$　　　　$Q_1\in\boldsymbol{\Omega}$
- $Q_2=\neg Q$　　　　$Q_2\in\boldsymbol{\Omega}$
- $Q_3=\square$　　　　$Q_3= (Q_1\text{-}Q) \vee (Q_2\text{-}\neg Q)$

- 定理：子句集合Ω是不可满足的当且仅当存在Ω的反驳。
- 证明：
- 1.假定存在Ω的反驳，并设为$Q_1,\cdots,Q_n$是反驳。
- (1).若$Q_k \in \Omega$，$\Omega \models Q_k$.
- (2).若$\Omega \models Q_i$，$\Omega \models Q_j$并且Q_k是Q_i, Q_j的归结子句，则$Q_i, Q_j \models Q_k$。因此，$\Omega \models Q_k$。
- (3).因为$Q_n=\square$，所以有Q_{n-1}和Q_k是相反文字，不妨设是q和$\neg q$。
- 因此，$\Omega \models q$，$\Omega \models \neg q$。$\Omega \models q \wedge \neg q$，Ω不可满足。

- 2.假定子句集合Ω是不可满足的。
- (1).不妨设子句集合Ω不含永真式。因为从Ω中去掉永真式不改变Ω的不可满足性。
- (2).若Ω含有相反文字，不妨设是q，则
- $Q_1=q$　　　　$Q_1 \in \Omega$
- $Q_2=\neg q$　　　　$Q_2 \in \Omega$
- $Q_3=\square$
- 因此，Q_1, Q_2, Q_3是反驳.

- (3).根据命题逻辑紧致性定理，若子句集合Ω不可满足，则有有穷子句集合Ω_0，$\Omega_0 \subseteq \Omega$，使得$\Omega_0$是不可满足的。
- 若有穷子句集合Ω_0是不可满足的，则Ω_0中的子句必出现相反文字。
  - 假设有穷子句集合Ω_0是不可满足的，且Ω_0中的子句不出现相反文字，那么，对于Ω_0中子句的每个文字q_k，有赋值函数σ使得$\sigma(q_k)=1$，因此，$\sigma(\Omega_0)=1$，Ω_0是可满足的，这样与Ω_0是不可满足的相矛盾。

- 设Ω_0有n种相反文字，有相反文字q和¬q，Ω_0中的子句分为三类，
  - 一类是有文字q的子句，
  - 另一类是有文字¬q的子句，
  - 再一类是没有文字q和¬q的子句

- $\Omega_q = \{ q \vee P_k \mid q \vee P_k \in \Omega \}$,
- $\Omega_{\neg q} = \{ \neg q \vee Q_k \mid \neg q \vee Q_k \in \Omega \}$
- $\Omega_C = \Omega - \Omega_q - \Omega_{\neg q}$
- $|\Omega_q| = m_1$， $|\Omega_{\neg q}| = m_2$， $|\Omega_C| = m_3$。
- $\Omega_R = \{ P_i \vee Q_j \mid q \vee P_i \in \Omega_q, \neg q \vee Q_j \in \Omega_{\neg q} \}$
- $\Omega_1 = \Omega_C \cup \Omega_R$
- Ω_1有n-1个命题变元。
- 若有$r \in \Omega_1$并且$\neg r \in \Omega_1$，则存在反驳。

- 若$\Omega_q \cup \Omega_{\neg q} \cup \Omega_C$不可满足，则$\Omega_1 = \Omega_C \cup \Omega_R$不可满足。
- 反证法：
- 若Ω_1是可满足的，则有赋值函数σ，使得$\sigma(\Omega_1)=1$。
- 1. 如果$\sigma(P_i)=1$，$i=1,\ldots,m_1$，那么令$\sigma'(q)=0$，而其他命题变元r有$\sigma'(r)=\sigma(r)$。
- $\sigma'(q \vee P_i)=1$，其中，$q \vee P_i \in \Omega_q$
- $\sigma'(\neg q \vee Q_j)=1$，其中，$\neg q \vee Q_j \in \Omega_{\neg q}$
- $\sigma'(R_k)=1$，其中，$R_k \in \Omega_C$
- 因此，若Ω_1是可满足的，则有σ'，使得$\sigma'(\Omega_0)=1$，这样就产生了矛盾，所以，Ω_1是不可满足的。

- 2. 如果$\sigma(P_i)=0$，$i\leqslant m_1$，则有$P_i\vee Q_j\in\mathbf{\Omega}_1$，$j=1,\cdots,m_2$。
- 因为$\sigma(\mathbf{\Omega}_1)=1$，所以有$\sigma(P_i\vee Q_j)=1$，即$\sigma(Q_j)=1$，$j=1,\cdots,m_2$。
- 令$\sigma'(q)=1$，而其他命题变元r有$\sigma'(r)=\sigma(r)$。
- $\sigma'(q\vee P_i)=1$，其中，$q\vee P_i\in\mathbf{\Omega}_q$
- $\sigma'(\neg q\vee Q_j)=1$，其中，$\neg q\vee Q_i\in\mathbf{\Omega}_{\neg q}$
- $\sigma'(R_k)=1$，其中，$R_k\in\mathbf{\Omega}_C$
- 若$\mathbf{\Omega}_1$是可满足的，则有σ'，使得$\sigma'(\mathbf{\Omega}_0)=1$，这样就产生了矛盾，所以，$\mathbf{\Omega}_1$是不可满足的。

- 因此，Ω_1有n-1个命题变元并且Ω_1是不可满足的。
- 对于所有的n进行处理获得Ω_n，必有反驳，否则必有Ω_n可满足，进而有Ω_0可满足。
- 证毕
- 以上证明是一种简化的归纳法证明

示例1

- 例题：$P \rightarrow (Q \wedge R) \vdash (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$　　分配律
- 证明：
- $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge \neg ((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$
- $\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge ((P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R))$
- $\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (P \vee (P \wedge \neg R)) \wedge (\neg Q \vee (P \wedge \neg R))$
- $\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge P \wedge (P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$

- $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge \neg ((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$的一个合取范式为
  - $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge P \wedge (P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
- 对应的子句集合

  $\Omega = \{ P, P \vee \neg Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg R, \neg P \vee R, \neg Q \vee \neg R \}$。

- $\Omega=\{ P, P\vee\neg Q, \neg P\vee Q, P\vee\neg R, \neg P\vee R, \neg Q\vee\neg R\}$
- $Q_1= P\vee\neg Q$ $Q_1\in\Omega$
- $Q_2=\neg P\vee Q$ $Q_2\in\Omega$
- $Q_3=\square$ $Q_3= (Q_1\text{-}P\text{-}\neg Q) \vee (Q_2\text{-}\neg P\text{-}Q)$

- $Q_1= P$ $Q_1\in\Omega$
- $Q_2=\neg P\vee Q$ $Q_2\in\Omega$
- $Q_3= Q$ $Q_3= (Q_1\text{-}P) \vee (Q_2\text{-}\neg P)$
- $Q_4= \neg P\vee R$ $Q_4\in\Omega$
- $Q_5= R$ $Q_5= (Q_1\text{-}P) \vee (Q_4 - \neg P)$
- $Q_6= \neg Q\vee\neg R$ $Q_6\in\Omega$
- $Q_7= \neg R$ $Q_7= (Q_3\text{-}Q) \vee (Q_6 - \neg Q)$
- $Q_8= \square$ $Q_8= (Q_5\text{-}R) \vee (Q_7 - \neg R)$
- $P\rightarrow(Q\vee R) \vdash (P\rightarrow Q) \vee (P\rightarrow R)$ 分配律
- 证毕

示例2

- 例题：$P \wedge Q \to R \vdash (P \to R) \vee (Q \to R)$
- 证明：
- $(P \wedge Q \to R) \wedge \neg((P \to R) \vee (Q \to R))$
- $\Leftrightarrow (\neg(P \wedge Q) \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R \vee \neg Q \vee R)$
- $\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge P \wedge Q \wedge \neg R$

- $(P \wedge Q \to R) \wedge \neg((P \to R) \vee (Q \to R))$的一个合取范式为
  - $(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge P \wedge Q \wedge \neg R$
- 对应子句集合
  - $\Omega = \{P, Q, \neg R, \neg P \vee \neg Q \vee R\}$

- $Q_1=\neg P\vee\neg Q\vee R$ $Q_1\in\Omega$
- $Q_2=P$ $Q_2\in\Omega$
- $Q_3=\neg Q\vee R$ $Q_3=(Q_1-\neg P)\vee(Q_2-P)$
- $Q_4=Q$ $Q_4\in\Omega$
- $Q_5=R$ $Q_5=(Q_3-\neg Q)\vee(Q_4-Q)$
- $Q_6=\neg R$ $Q_6\in\Omega$
- $Q_7=\square$ $Q_7=(Q_5-R)\vee(Q_6-\neg R)$
- 因此$P\wedge Q\to R\vdash(P\to R)\vee(Q\to R)$
- 证毕

提纲

- 4.1机械证明简介
- 4.2命题逻辑归结法
- 4.3前束范式与斯科伦范式
- 4.4谓词逻辑归结法
- 4.5谓词逻辑归结法的完备性

示例：判断永假性质

- $\mathscr{L}$= {P, Q}，其中P和Q是一元谓词
- 判断**A∧B**是否恒真?
  - A：$\exists xP(x) \to \forall xQ(x)$
  - B：$\forall x(P(x) \land \neg Q(x))$
- 证明一：模型（解释和赋值）
- 证明二：等值演算推理

示例：判断永假性质

- 证明一：模型（解释和赋值）
- 给定任意解释I和赋值σ
- 1.若$\sigma_I(\exists x P(x)) = 0$, 则$\forall d \in D_I$, $P(d) = 0$.

  因此$\sigma_I(B) = \sigma_I(\forall x(P(x) \wedge \neg Q(x))) = 0$， 从而**A∧B**为**0**
- 2. 若$\sigma_I(\exists x P(x)) = 1$, $\sigma_I(\forall x Q(x))=0$, 则$\exists\, d \in D_I$, $Q(d) = 0$.
- 因此$\sigma_I(A) = 0$， 从而**A∧B**为**0**
- 3. 若$\sigma_I(\exists x P(x)) = 1$,且$\sigma_I(\forall x Q(x)) = 1$
- 因此$\sigma_I(B) = \sigma_I(\forall x(P(x) \wedge \neg Q(x))) = 0$， 从而**A∧B**为**0**
- 综上， **A∧B**恒为假。

示例：判断永假性质

- 证明二：等值演算推理
- $A \wedge B$
- $= (\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \wedge (\forall x (P(x) \wedge \neg Q(x)))$
- $= \forall x (P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \wedge (\forall x (P(x) \wedge \neg Q(x)))$
- $= \forall x (P(x) \rightarrow \forall y Q(y)) \wedge (\forall x (P(x) \wedge \neg Q(x)))$
- $= \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge (\forall x (P(x) \wedge \neg Q(x)))$
- $= \forall x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge (\forall z (P(z) \wedge \neg Q(z)))$
- $\forall x \forall y \forall z ((P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge (P(z) \wedge \neg Q(z)))$
- $\forall x \forall y \forall z ((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge (P(z) \wedge \neg Q(z)))$

示例：判断永假性质

- 证明二：等值演算推理
- $A \wedge B = \forall x \forall y \forall z\, ((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge (P(z) \wedge \neg Q(z)))$
- 因此：
- $A \wedge B \models \forall x \forall y (\neg P(x) \vee Q(y))$
- $A \wedge B \models \forall z P(z)$
- $A \wedge B \models \forall z \neg Q(z)$
- 而：
- $\{\neg P(x) \vee Q(y)$， $P(z)$ ， $\neg Q(z)\}$ 是永假的
- 综上， $A \wedge B$恒为假。

前束范式

- 定义：形如$Q_1x_1\cdots Q_nx_nA$的公式称为前束范式，其中n是自然数，Q_i (1 <= i<=n)是量词∃或∀，变元x_i (1 <= i<=n)互不相同，公式A不含任何量词
- 称A为$Q_1x_1\cdots Q_nx_nA$的无量词部分

等值性质

- 定理：每一个公式都等值于一个前束范式
- 基于以下等值演算
- $\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$
- $\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
- $\exists x P \to Q \Leftrightarrow \forall y (P[x/y] \to Q)$
- $\forall x P \to Q \Leftrightarrow \exists y (P[x/y] \to Q)$
- $P \to \exists x Q \Leftrightarrow \exists y (P \to Q[x/y])$
- $P \to \forall x Q \Leftrightarrow \forall y (P \to Q[x/y])$

等值性质

- 基于量词个数的归纳法，假定公式只有¬和→逻辑连接词
- 证明：
- 1. $\neg Q_1x_1\cdots Q_nx_nA \Leftrightarrow Q'_1x_1\cdots Q'_nx_n\neg A$，其中
- (1)若Q_i是$\exists$，则Q'_i是$\forall$；若Q_i是$\forall$，则Q'_i是$\exists$；
- 2. $Q_1x_1\cdots Q_nx_nA_1 \to R_1y_1\cdots R_my_mA_2 \Leftrightarrow$ $Q'_1u_1\cdots Q'_nu_nR_1v_1\cdots R_mv_mB$，其中
- (1)$B = A_1[x_1/u_1,\cdots, x_n/u_n] \to A_2[y_1/v_1,\cdots, y_m/v_m]$
- (2)若Q_i是$\exists$，则Q'_i是$\forall$；若Q_i是$\forall$，则Q'_i是$\exists$；
- (3) u_i和v_j互不相同，并且不在A_1和A_2出现

无存在前束范式

- 定义：不出现存在量词的前束范式称为无存在前束范式，也称为全称公式。
- 示例：
  - $\forall x \forall y\, (P(x) \rightarrow Q(y))$是无存在前束范式

事实1

- 存在量词不能换为常元
- 示例：设c为常元，P是二元谓词，语言$\mathscr{L}=\{P, c\}$。
- 考虑以下两个公式：
  - $A_1 = \forall x\,(P(x, c) \land \neg P(x, x))$
  - $A_2 = \forall x \exists y (P(x, y) \land \neg P(x, x))$
- A_1是不可满足的，而A_2是可满足的

事实2

- 存在量词转换为（多个）函词
- 示例：设c为常元，f是2元函词，g是3元函词，h是3元函词，P是7元谓词，语言$\mathscr{L}$= {c, f, g, h,P}。
- 公式$A=\exists x_1 \forall x_2 x_3 \exists x_4 \forall x_5 \exists x_6 x_7 P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$可满足
- A可满足，当且仅当如下公式可满足
    - $\forall x_2 x_3 \exists x_4 \forall x_5 \exists x_6 x_7 P(c_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$
- 当且仅当如下公式可满足
    - $\forall x_2 x_3 x_5 \exists x_6 x_7 P(c_1, x_2, x_3, f(x_2, x_3), x_5, x_6, x_7)$
- 当且仅当如下公式可满足
- $\forall x_2 x_3 x_5 \exists x_7 P(c_1, x_2, x_3, f(x_2, x_3), x_5, g(x_2, x_3, x_5), x_7)$
- 当且仅当如下公式可满足
    - $\forall x_2 x_3 x_5 P(c_1, x_2, x_3, f(x_2, x_3), x_5, g(x_2, x_3, x_5), h(x_2, x_3, x_5))$

公式与全称公式

- 定理：语言$\mathscr{L}$包含无限多个常元，对任意n，存在无限多个n元函词，则：对于任意前束范式A存在一个无存在前束范式B，使得A是可满足的当且仅当B是可满足的。
- 证明：P70
- 关键：定义一个运算-E：
  - (1) 如果B是公式$\exists x A$，则$B^{-E}= A[x/c]$，
    其中c是没有出新在A中的一个常元
  - (2)如果B是公式$\forall x_1\cdots x_n \exists x A$，则$B^{-E}= A[x/f(x_1, \cdots, x_n)]$，
    其中f是没有出新在A中的一个n元函词

Skolem范式

- 定义：对于一个无存在前束范式$\forall x_1 \cdots x_n A$，如果无量词部分A是一个合取范式，则称为Skolem范式。
- 定理：对于任意公式A存在一个Skolem范式B，使得A是可满足的当且仅当B是可满足的。

示例1

- 永真式的Skolem范式不是永真的
- 示例：a, b为常元, P是1元谓词, 语言$\mathscr{L}$= {a, b, P}。
- 对于公式A = $\forall x P(x) \to P(a)$存在以下事实：
- (1) A是永真式
- (2) A的前束范式$\exists x(P(x) \to P(a))$
- (3) A的无存在前束范式$P(b) \to P(a)$
- (4) A的Skolem范式B= $\neg P(b) \lor P(a)$
- (5) B不是永真式

示例2

- Skolem范式用来判断可满足性的
- 示例：a为常元，f是1元函词，P和Q是1元谓词，语言$\mathscr{L}$= {a, P, Q}。
- 公式A = $(\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$

示例2

- (1) A的前束范式
  - $\exists z\forall xy(P(x)\vee Q(y)\rightarrow P(z)\vee Q(z))$
  - $\forall xy\exists z(P(x)\vee Q(y)\rightarrow P(z)\vee Q(z))$
- (2) A的无存在前束范式
  - $\forall xy(P(x)\vee Q(y)\rightarrow P(a)\vee Q(a))$
  - $\forall xy\,(P(x)\vee Q(y)\rightarrow P(f(x,y))\vee Q(f(x,y)))$
- (3) A的Skolem范式B
  - $\forall xy((\neg P(x)\vee P(a)\vee Q(a))\wedge(\neg Q(y)\vee P(a)\vee Q(a)))$
  - $\forall xy((\neg P(x)\vee P(f(x,y))\vee Q(f(x,y)))\wedge(\neg Q(y)\vee P(f(x,y))\vee Q(f(x,y))))$
- B是可满足的，因此A是可满足的

提纲

- 4.1机械证明简介
- 4.2命题逻辑归结法
- 4.3前束范式与斯科伦范式
- 4.4谓词逻辑归结法
- 4.5谓词逻辑归结法的完备性

示例1

- 给定一阶语言$\mathscr{L}$= $\{c_1, c_2, P, Q\}$，其中c_1, c_2为常元，P,Q是1元谓词。
- (1)公式A = $(\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$
- (2)公式的补$\neg$A
  - $(\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)) \wedge \forall x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$
- (3)公式$\neg$A的前束范式
  - $\exists xy\forall z((P(x) \vee Q(y)) \wedge \neg P(z) \wedge \neg Q(z))$
- (4)公式$\neg$A的Skolem范式C
  - $\forall z((P(c_1) \vee Q(c_2)) \wedge \neg P(z) \wedge \neg Q(z))$

示例1

- $C=\forall z((P(c_1) \vee Q(c_2)) \wedge \neg P(z) \wedge \neg Q(z))$； $\mathscr{L}=\{c_1, c_2, P, Q\}$
- 从而推出：
  - $C \models (P(c_1) \vee Q(c_2)) \wedge \neg P(c_1) \wedge \neg Q(c_1)$
  - $C \models (P(c_1) \vee Q(c_2)) \wedge \neg P(c_2) \wedge \neg Q(c_2)$
- 进而得到：
  - $C \models P(c_1) \vee Q(c_2)$
  - $C \models \neg P(c_1) \wedge \neg Q(c_2)$
- 将$P(c_1)$ 和$P(c_2)$看做命题变元p,q，得到子句集合S
  - $\{p \vee q，\neg p，\neg q\}$，
- 可以很容易的得到S的一个反驳，从而能够说明C是永假的，所以$\neg$A是永假的，从而A是永真的。

概念(1/3)

- 类似于命题逻辑，我们定义一些谓词逻辑概念.
- 文字：原子公式或者原子公式的非称为文字.
- 相反文字：若P是原子公式,则¬P是P的 相反文字, P是¬P的相反文字.
- 子句：文字的有限集合称为子句.
- 基文字：不出现变元的文字称为基文字.
- 基子句：不出现变元的子句称为基子句.
- 空子句：空的子句称为空子句 – 永假.
- 子句集合：子句的有限集合称为子句集合.

概念(2/3)

- 代换：称$\sigma[x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n]$为一个代换
  - (1)如果P是文字，则$\sigma(P)$表示：
    - $P[x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n]$
  - (2) 如果C是子句$\{P_1,\cdots,P_m\}$，则$\sigma(C)$表示：
    - $\{P_1[x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n],\cdots,P_m[x_1/t_1,\cdots,x_n/t_n]\}$
- 子句集合与Skolem范式
  - 子句 $\{P_1,\cdots,P_m\}$也可以写为$P_1\vee\cdots\vee P_m$，用来表示公式$P_1\vee\cdots\vee P_m$的闭包
  - 子句集合$\{\{P_{1,1},\cdots,P_{1,m1}\},\cdots,\{P_{n,1},\cdots,P_{n,mn}\}\}$，用来表示公式$(P_{1,1}\vee\cdots\vee P_{1,m})\wedge\cdots\wedge(P_{n,1}\vee\cdots\vee P_{n,m})$的闭包
  - 是一个Skolem范式

概念(3/3)

- 示例(c是常元, x, y, z是变元， P,Q是一元谓词):
  - $\neg P(c)$与$P(c)$是相反文字
  - $\neg P(c)$与$P(x)$不是相反文字
  - 代换$\sigma[z/c]$，则$\sigma(\neg P(z)) = \neg P(c)$
  - $\{\neg P(c), Q(a)\}$是基子句
  - 子句$\{P(x), Q(y)\}$表示公式$\forall xy(P(x) \vee Q(y))$
  - 子句集合$\{\{P(x), Q(y)\}, \{P(c), \neg Q(z)\}\}$表示Skolem范式$\forall xyz((P(x) \vee Q(y)) \wedge (P(c) \vee \neg Q(z)))$

可满足性

- 给定一阶语言$\mathscr{L}$; C_1, C_2, C_3, C是子句, S是字句集合。
- $\mathscr{L}$的一个解释I满足C, 指I满足C所表示的语句，记为 $I|=C$ 。
- 如果对于任意赋值I，当$I|=C_1$且$I|=C_2$时，有$I|=C_3$，则称C_3 是C_1和C_2的推论，记为$C_1, C_2 |= C_3$。
- 若存在$\mathscr{L}$的解释I满足C, 则称C是可满足的; 否则称C是不可满足的。
- 解释I满足S是指 满足S所表示的 Skolem 范式。
- 若存在$\mathscr{L}$的解释满足S , 则称S是可满足的; 否则称S是不可满足的。

示例(可满足性)

- 示例：给定一阶语言$\mathscr{L}$= {c, P, Q}，其中c为常元, P,Q是1元谓词。
- 子句{P(c) , Q(x)}是可满足的.
- {P(c) , Q(x)}， {¬Q(y)} |= {P(c)}

归结子句

- 定义：给定一阶语言$\mathscr{L}$；C_1, C_2是子句；σ_1，σ_2是代换，P和¬P 是相反文字，则形如$(\sigma_1(C_1) - P) \cup (\sigma_2(C_2) - \neg P)$的子句称为$C_1$,和$C_2$的归结子句。
- 如果子句C_1, C_2, C_3具有上述关系，则记为 $C_1, C_2 \vdash C_3$

归结子句

- 示例：给定一阶语言$\mathscr{L}$= {c, f, g, P, Q}，其中c为常元，f, g是1元函词，P,Q是1元谓词。则有：
- (1) $P(c), \neg P(x) \vdash \Box$
- (2) $P(c) \vee Q(x), \neg Q(y) \vdash P(c)$
- (3) $P(x) \vee Q(x), \neg Q(y) \vdash P(x)$
- (4) $P(x) \vee Q(x), \neg Q(y) \vdash P(f(x))$
- (5) 若A= $P(x) \vee Q(f(y)) \vee R(g(y))$, B = $\neg P(y) \vee \neg R(y)$, 则
  - A, B $\vdash Q(f(y)) \vee R(g(y)) \vee \neg R(y)$,
  - A, B $\vdash R(g(y)) \vee \neg R(f(y))$ X

反驳

- 定义：设S是子句集合，如果子句序列$Q_1, \cdots,$ Q_n满足如下条件，则称子句序列$Q_1,\cdots,Q_n$为子句集合S的一个反驳。
- (1) 对于每个$1 \leqslant k<n$，
  - $Q_k \in S$，或者
  - Q_k是Q_i和Q_j的归结子句，$i<k$，$j<k$。
- (2) Q_n是□。

反驳

- 示例：给定一阶语言$\mathscr{L}$= $\{c_1, c_2, P, Q\}$，其中c_1, c_2为常元, P, Q是1元谓词；
- 子句集合S = $\{P(c_1) \vee Q(c_2), \neg P(x), \neg Q(x)\}$:
  - C_1: $P(c_1) \vee Q(c_2)$
  - C_2: $\neg P(x)$
  - C_3: $\neg Q(x)$
  - C_4: $Q(c_2)$ $C_1, C_2 \vdash C_4$
  - C_5: $\square$ $C_3, C_4 \vdash C_5$
- C_1, C_2, C_3, C_4, C_5为子句集合S的一个反驳

归结推出与语义推出

- 定理：给定一阶语言$\mathscr{L}$，C_1, C_2是$\mathscr{L}$的两个子句。如果$C_1, C_2 \vdash C$，那么$C_1, C_2 \models C$。
- 证明：
- 由$C_1, C_2 \vdash C$，可知存在代换σ_1，σ_2，及相反文字P，$\neg P$，使得$C = (\sigma_1(C_1) - P) \cup (\sigma_2(C_2) - \neg P)$
- 假定C_1, C_2, C代表的公式分别为ψ_1, ψ_2，ψ，则有：
  - (1) $\psi_1 \models \sigma_1(C_1)$, (2) $\psi_2 \models \sigma_2(C_2)$
- 从而 ψ_1, $\psi_2 \models C$, ψ_1, $\psi_2 \models \psi$
- 因此$C_1, C_2 \models C$。
- 证毕。

归结法的可靠性

- 定理：给定一阶语言$\mathscr{L}$，假设S是$\mathscr{L}$的子句集合. 若S有一个反驳，则S是不可满足的.
- 证明：
- 根据归结一步可以传递可满足性，若S是可满足的，则它的反驳序列中每个子句都是可满足的，但最後一个空子句是不可满足的. 所以S是不可满足的。

归结法的完备性

- 定理：给定一阶语言$\mathscr{L}$，假设S是$\mathscr{L}$的子句集合. 若S是不可满足的，则S有一个反驳。
- 证明：在后面专门介绍。

示例1

- 给定一阶语言$\mathscr{L}$= {c_1, c_2, P, Q}，其中c_1, c_2为常元, P, Q是1元谓词；
- 语句$A=\neg((\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x)))$的Skolem范式
  - $\forall z((P(c_1) \vee Q(c_2)) \wedge \neg P(z) \wedge \neg Q(z))$
- 对应的子句集合
  - $S = \{(P(c_1) \vee Q(c_2)), \neg P(z), \neg Q(z)\}$
- 存在一个反驳:
  - $P(c1) \vee Q(c2), \neg P(z), \neg Q(z), Q(c2), \square$
- 因此公式¬A是永真的

示例1

- 子句集合$S=\{(P(c_1)\vee Q(c_2)), \neg P(z), \neg Q(z)\}$对应的基子句集合
  - $\{(P(c_1)\vee Q(c_2)), \neg P(c_1), \neg Q(c_1), \neg P(c_2), \neg Q(c_2)\}$
- 将$P(c_1), Q(c_1), P(c_2), Q(c_2)$看做命题变元$p_1, p_2, p_3, p_4$，则转换为
  - $\{p_1\vee p_4, \neg p_1, \neg p_2, \neg p_3, \neg p_4\}$
- 存在一个命题逻辑的反驳
  - $p_1\vee p_4, \neg p_1, \neg p_4, \square$
- 然后转为对应谓词逻辑的反驳
  - $P(c1)\vee Q(c2), \neg P(c1), \neg Q(c2), Q(c2), \square$
- 然后转为对应原有谓词逻辑的反驳
  - $P(c1)\vee Q(c2), \neg P(z), \neg Q(z), Q(c2), \square$

示例2

- 给定一阶语言$\mathscr{L}$= {a, b, c，P, Q, R, S}，其中a, b, c为常元, P, Q, R是1元谓词，S是2元谓词。
- 定义以下公式：
  - A： $\exists x(P(x) \wedge \forall y(R(y) \to S(x, y)))$,
  - B： $\forall x(P(x) \to \forall y(Q(y) \to \neg S(x, y)))$,
  - C： $\forall x(R(x) \to \neg Q(x))$.
- 证明A, B $\models$ C

示例2

- 证明1(模型):
- 对于任意解释I，若I $|=$A $\wedge$ B，则需要证明:
  - 对于任意a $\in D_I$, 有R(a) $\rightarrow \neg$Q(a)，即若R(a) =1，Q(a) = 0。
- 由I $|=$ A，推出存在b $\in D_I$, 使得P(b) = 1, $\forall$y(R(y)$\rightarrow$ S(b, y)) =1
- 由I $|=$ B，推出P(b) =1, $\forall$y(Q(y)$\rightarrow \neg$S(b, y)) = 1.
- 推出$\forall$yQ(y) = 0.
- 所以I $|=$C
- 证毕。

示例2

- 证明2(归结方法):
- (1)A转化为子句集合S_A:
  - $\exists x(P(x) \wedge \forall y(R(y) \rightarrow S(x, y)))$,
  - $\exists x \forall y(P(x) \wedge (R(y) \rightarrow S(x, y)))$,
  - $\exists x \forall y(P(x) \wedge (\neg R(y)) \vee S(x, y)))$,
  - $\forall y(P(c) \wedge (\neg R(y)) \vee S(c, y)))$,
  - $\forall x(P(c) \wedge (\neg R(x)) \vee S(c, x)))$,
  - $\{P(c), \neg R(x) \vee S(c, x)\}$

示例2

- (2)B转化为子句集合S_B：
  - $\forall x(P(x) \to \forall y(Q(y) \to \neg S(x, y)))$,
  - $\forall x \forall y(P(x) \to (Q(y) \to \neg S(x, y)))$,
  - $\forall x \forall y(\neg P(x) \lor \neg Q(y) \lor \neg S(x, y))$,
  - $\forall y \forall z(\neg P(y) \lor \neg Q(z) \lor \neg S(y, z))$,
  - $\{\neg P(y) \lor \neg Q(z) \lor \neg S(y, z)\}$
- (3)¬C转化为子句集合$S_{\neg C}$：
  - $\neg \forall x(R(x) \to \neg Q(x))$,
  - $\exists x(R(x) \land Q(x))$,
  - $R(b) \land Q(b)$
  - $\{R(b), Q(b)\}$

示例2

- (4)构造以下子句：
  - $C1 = P(c)$
  - $C2 = \neg R(x) \vee S(c, x)$
  - $C3 = \neg P(y) \vee \neg Q(z) \vee \neg S(y, z)$
  - $C4 = R(b)$,
  - $C5 = Q(b)$
- (5) 构造以下反驳：
  - C1，C3 $\vdash$ $C6=\neg Q(z) \vee \neg S(c, z)$
  - C2，C4 $\vdash$ $C7= S(c, b)$
  - C6，C7 $\vdash$ $C8= \neg Q(b)$
  - C5，C8 $\vdash \square$
- 证毕。

示例3：

- 给定一阶语言$\mathscr{L}$= {a, b, c，P, Q, R, S}，其中a, b, c为常元, P, S是1元谓词，R是2元谓词，Q是3元谓词。
- 定义以下公式：
  - A：$\forall xy((Q(x,x,y) \land \neg P(y)) \to S(x))$,
  - B：$\exists xy(R(y, x) \land \neg P(x))$,
  - C：$\exists x \forall y\, Q(x,x,y)$,
  - D：$\exists x S(x)$
- 证明A, B，C$\models$ D

示例3：

- 证明(语义推出):
- (1)A转化为子句集合S_A：
  - $\forall xy((Q(x,x,y) \wedge \neg P(y)) \rightarrow S(x))$,
  - $\forall xy(\neg Q(x,x,y) \vee P(y) \vee S(x))$,
  - $\{\neg Q(x,x,y) \vee P(y) \vee S(x)\}$
- (2)B转化为子句集合S_B：
  - $\exists xy(R(y, x) \wedge \neg P(x))$,
  - $\{R(a, b), \ \neg P(b)\}$
- (3)C转化为子句集合S_C：
  - $\exists x \forall y\ Q(x,x,y)$,
  - $\forall z\ Q(c,c,z)$
  - $\{Q(c,c,z)\}$

示例3：

- (4) $\neg D$转化为子句集合$S_{\neg D}$：
  - $\neg\exists x S(x)$
  - $\forall x \neg S(x)$
  - $\{\neg S(w)\}$
- (5)构造以下子句：
  - $C1 = \neg Q(x,x,y) \vee P(y) \vee S(x)$
  - $C2 = R(a, b)$
  - $C3 = \neg P(b)$
  - $C4 = Q(c,c,z)$
  - $C5 = \neg S(w)$

示例3：

- (6)构造以下反驳：
  - C1，C4 $\vdash$ C6= $P(z) \vee S(c)$
  - C6，C3 $\vdash$ C7= $S(c)$
  - C7，C5 $\vdash \square$
- 证毕。

示例4：

- 给定一阶语言$\mathscr{L}$= {a, b, P, Q}，其中a, b为常元, P, Q是1元谓词。
- 定义以下公式：
  - A：$\exists x P(x)$,
  - B：$\exists x Q(x)$,
  - C：$\exists x (P(x) \wedge Q(x))$
- 证明A, B |= C不成立

示例4：

- 证明：
- (1) $A \wedge B \wedge \neg C$的子句集合
  - $= \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge \neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))$
  - $= \exists x P(x) \wedge \exists y Q(y) \wedge \forall z (\neg P(z) \vee \neg Q(z))$
  - $= \exists x y \forall z (P(x) \wedge Q(y) \wedge (\neg P(z) \vee \neg Q(z)))$
  - $= \{P(a), Q(b), \neg P(z) \vee \neg Q(z)\}$
- (2)可能的归结：
  - $P(a), \neg P(z) \vee \neg Q(z) \quad \vdash \neg Q(a)$
  - $Q(b), \neg P(z) \vee \neg Q(z) \quad \vdash \neg P(b)$
- (3)不存在一个反驳
- 证毕。

示例5：

- 证明:某些学生喜欢每门课程, 没有学生喜欢文学. 因此, 没有课程是文学.
- 定义如下谓词逻辑符号:
  - 论域D：包括所有的学生和课程
  - 谓词P(x): x是学生
  - 谓词Q(y): y是课程
  - 谓词R(z): z是文学
  - 谓词L(x,y):学生x喜欢课程y
- 定义如下公式:
  - $A = \exists x(P(x) \land \forall y(Q(y) \to L(x,y)))$：某些学生喜欢每门课程
  - $B = \neg\exists xy(P(x) \land R(y) \land L(x,y))$: 没有学生喜欢文学
  - $C = \neg\exists x(Q(x) \land R(x))$: 没有课程是文学

示例5：

- 需要证明A, B |= C
- (1) A的子句集合
  - $\exists x(P(x) \wedge \forall y(Q(y) \rightarrow L(x,y)))$
  - $\exists x \forall y\,(P(x) \wedge (Q(y) \rightarrow L(x,y)))$
  - $\forall y(P(a) \wedge (Q(y) \rightarrow L(a,y)))$
  - $\forall x(P(a) \wedge (Q(x) \rightarrow L(a,x)))$
  - $\{P(a), \neg Q(x) \vee L(a,x)\}$
- (2) B的子句集合
  - $\neg \exists xy(P(x) \wedge R(y) \wedge L(x,y))$
  - $\forall xy(\neg P(x) \vee \neg R(y) \vee \neg L(x,y))$
  - $\forall yz(\neg P(y) \vee \neg R(z) \vee \neg L(y,z))$
  - $\{\neg P(y) \vee \neg R(z) \vee \neg L(y,z)\}$

示例5:

- (3) $\neg$C的子句集合
  - $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$
  - $Q(b) \wedge R(b)$
  - $\{Q(b), R(b)\}$
- (4)构造以下反驳
  - $P(a), \neg P(y) \vee \neg R(z) \vee \neg L(y,z) \vdash \neg R(z) \vee \neg L(a, z)$
  - $R(b), \neg R(z) \vee \neg L(a, z) \vdash \neg L(a, b)$
  - $\neg Q(x) \vee L(a,x), \neg L(a, b) \vdash \neg Q(b)$
  - $\neg Q(b), Q(b) \vdash \Box$
- 证毕。

提纲

- 4.1机械证明简介
- 4.2命题逻辑归结法
- 4.3前束范式与斯科伦范式
- 4.4谓词逻辑归结法
- 4.5谓词逻辑归结法的完备性

基本概念

- 约定4.1(常元): 在下面的讨论中, 都假设相应的一阶语言中至少包含一个常元.
- 定义4.1(Herbrand 解释): 给定一阶语言 $\mathscr{L}$, 称它的解释I 是一个 Herbrand 解释, 若I满足以下条件.
  - (1) 论域D_I是全体基项的集合, 称Herbrand 域;
  - (2) 对于语言$\mathscr{L}$的每个常元c, 定义:
    - $c_I = c$;
  - (3) 对于语言$\mathscr{L}$的每个n元函数符号f, 定义:
    - $f_I(t_1, \cdots, t_n) = f(t_1, \cdots, t_n)$, 对任意$t_1, \cdots, t_n \in D_I$

示例1

- 1. 给定子句结合S = { $P(a), \neg P(x) \vee P(f(x))$ }，则
  - 其Herbrand 域$D_I = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \cdots\}$
- 2. 给定子句结合S = { $\neg P(x) \vee Q(x), R(z)$ }，则
  - 其Herbrand 域$D_I = \{a\}$
- 注：a是常元；f是一元涵词；P，Q，R是一元谓词

基本概念

- 定义4.2 (基项的取值):假设t是语言$\mathscr{L}$的一个基项, 则以t_I表示项t在解释I及I的某个赋值之下的取值.

- 示例: 给定给定一阶$\mathscr{L}$= {c, f}其中c是常元, f是1元函数号.设I为$\mathscr{L}$的一个Herbrand 解释, 则
  - $c_I = c$;
  - $(f(c))_I = (f_I(c_I)) = (f_I(c)) = f(c)$
  - …

Herbrand解释中基项的取值:

- 定理：设t是语言$\mathscr{L}$的一个基项, I为$\mathscr{L}$的一个Herbrand解释，则$t = t_I$。

- 证明：对基项的长度归纳。

基本概念

- 定义4.3 (子句的基实例):给定一阶语言$\mathscr{L}$，设
  - (1) C是子句，
  - (2) $x_1, \cdots, x_n$是C中出现的所有不同变元，
  - (3) $t_1, \cdots, t_n$是基项，
  - (4) σ是代换$[x_1/t_1, \cdots, x_n/t_1]$
- 则σ(C)为C的一个基实例, 也称C所表示语句的基实例

示例

- 给定子句$C = P(x) \vee R(f(x))$，则
  - 其Herbrand域$D_I = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \cdots\}$
  - 其基实例为
    - $P(a) \vee R(f(a))$
    - $P(f(a)) \vee R(f(f(a)))$
    - 。。。

子句与基实例

- **定理：** 给定一阶语言$\mathscr{L}$,假设C是子句，D是C的一个基实例，则$C \vdash D$（归结）。
- **证明：**
  - 设C表示的为$\forall x_1, \cdots, x_n \psi$，则D表示的语句为$\sigma(\psi)$，其中$\sigma$是一个代换。
  - 由于$\forall x_1, \cdots, x_n \psi \models \sigma(\psi)$，所以$C \vdash D$。

基本概念

- 定义4.4 (子解释): 给定一阶语言$\mathscr{L}$，设I_1、I_2是$\mathscr{L}$两个解释，并且满足以下条件:
  - (1) D_{I1}是D_{I2}的一个子集;
  - (2) 若c是$\mathscr{L}$中的常元，则$c_{I1}=c_{I2}$;
  - (3)若f是$\mathscr{L}$中的函词，则$f_{I1}(c_1, \cdots, c_n) = f_{I2}(c_1, \cdots, c_n)$，其中$c_1, \cdots, c_n \in D_{I1}$
  - (4)若P是$\mathscr{L}$中的谓词，则$P_{I1}(c_1, \cdots, c_n) = P_{I2}(c_1, \cdots, c_n)$，其中$c_1, \cdots, c_n \in D_{I1}$
- 则称I_1是I_2的子解释。

子解释性质

- 定理(保持项的取值及开公式的可满足性质)：给定一阶语言$\mathscr{L}$，I_1、I_2是$\mathscr{L}$两个解释（I_1是I_2的子解释），v分是I_1和I_2的赋值，则给定$\mathscr{L}$的任意项t及任意开公式A，有
- (1) $v_{I1}(t) = v_{I2}(t)$
- (2) $v_{I1}(A) = v_{I2}(A)$.
- 证明：归纳法证明该性质.

- Herbrand 定理: 给定一阶语言$\mathscr{L}$, 假设C是子句, Γ是子句C的所有基实例组成的集合，则Γ是可满足的当且仅当C是可满足的。
- 证明(omitted):

- 推论: 子句C与它的所有基实例组成的集合Γ的永假性是等价的:

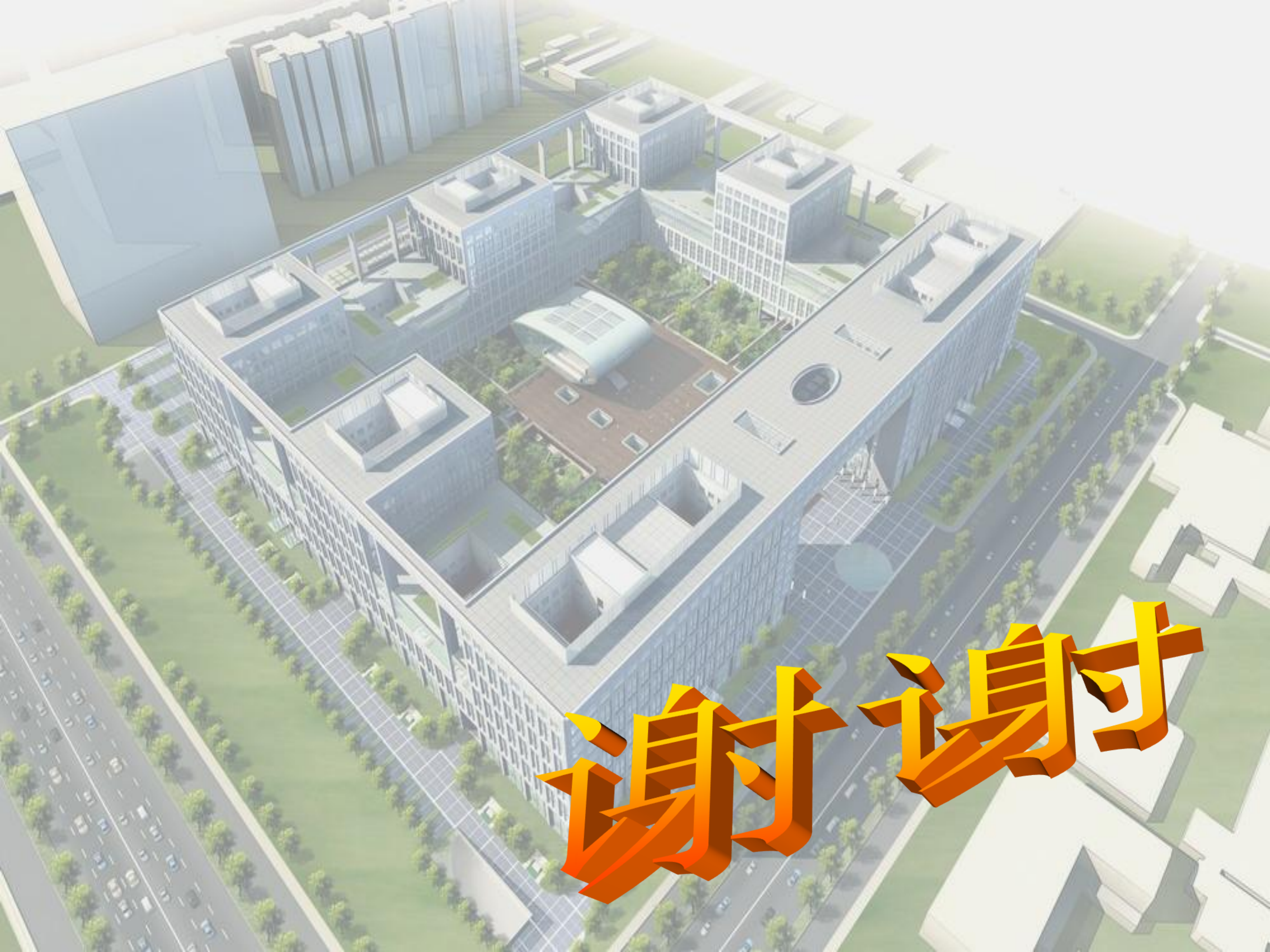
从谓词逻辑到命题逻辑

- 定理:给定一阶语言$\mathscr{L}$，Γ是一些基实例组成的集合，
- (1) 对于Γ中出现的每个原子公式A，都定义一个相应的命题变元p_A；
- .(2) 将Γ中出现的原子公式A都替换为相应的命题变元 p_A,
- 这样得到命题逻辑的语句集合Δ。
- 则有:
- Γ是可满足的当且仅当是Δ可满足的。

归结方法的完备性

- 定理 (谓词逻辑归结方法的完备性): 给定一阶语言$\mathscr{L}$, 假设S是 的子句集合，若S是不可满足的，则S有一个反驳.
- 证明:分六步证明
- (一)S子句转换为基实例集合.
- 已知S是子句集合, 假设Γ是S的中所有子句的所有基实例组成的集合. 因为S是不可满足的, 所以Γ是不可满足的.
- (二)谓词逻辑语句集合Γ转换为命题逻辑语句集合Δ.
- 因为Γ是不可满足的, 所以Δ.是不可满足的.
- (三).由无限到有限.
- 根据命题逻辑的紧致性定理, 可知存在Δ的不可满足的有限子集Δ'

- (四).获得命题逻辑的反驳.
- 根据命题逻辑归结法的完备性可知Δ’有反驳.
- (五).从命题逻辑的反驳到谓词逻辑的反驳.
- 将这个反驳中出现的命题变元恢复为所对应的原子公式, 则可得谓词逻辑的反驳, 它是 的一个反驳:
- (六).构造完整的反驳.
- 根据上述构造完整的反驳。


谢谢